群速度/位相速度

田渕雅夫 1999/5/3

1 位相速度

群速度を考える前に、位相速度がどういうものか確認する。

「位相速度」とは普通の正弦波が進む早さのことである。しかし、結晶の格子振動などを考えると、振動している一個一個の原子は移動しない (図 1)。では、移動しているのは何か。移動しているように「見える」のは波の形である。

例として $\cos(Kx - \omega t)$ と書ける進行波の $t = 0, 0.3, 0.6, ...$ の時の形を図 2 に示した。この図でもわかる様に、波の中の一つの山や谷に注目すると、それが時間とともに移動していくように見える。波を表す式が、$\cos(Kx - \omega t)$ であるので、山や谷に限らず、波の中の一つの点は、定数 $constant$ を使って、$Kx - \omega t = constant$ という様に指定できる。この点は $\cos(constant)$ というある決まった「位相」の点を示すことになる。$Kx - \omega t = constant$ の点は、$x = \omega/Kt + constant/K$ で移動するので、その早さは、ω/K ということになる。これが「位相速度」である。

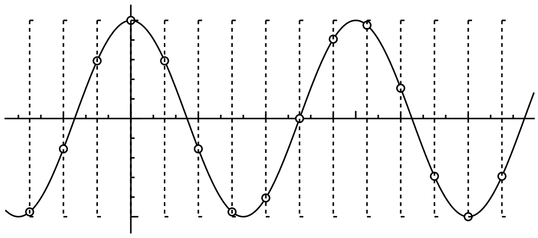

図 1: 各原子はある点を中心に振動しているだけで (図中では縦の点線)、時間が経っても移動しない。

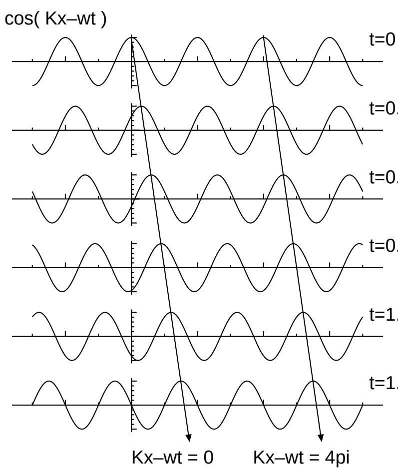

図 2: $\cos(Kx - \omega t)$ のグラフ。$t = 0, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.5$ と時間が経つにつれて同位相の点が進行していくように見える。

繰り返しになるが、格子振動を考える場合、本当の意味で位相速度で移動しているものはない。決まった点を中心に単振動する原子の集まりを見ていると、その振動の位相のずれ (山谷のタイミングのずれ) が規則的に並んでいるので、あたかも山谷が移動しているかの様に「見える」だけのものである。

1.1 分散

もし、振動している原子間に働く力が何もなく、各原子を独立に振動させせられるのなら、K と ω は独立に好きな値をとれる。ω は各原子が振動するその早さ (角周波数) であるし、K は隣同士の原子の振動の位相がどれだけずれているかを表す。従ってイメージ的には、原子を順番に決まった強さで弾いていって、その強さと、弾いていくタイミングを変えれば ω と K は自由に決められる。

しかし、実際の振動では、ある点の振動は、その周りの動きに影響を与える。その結果、ω と K は独立でなくなる。この ω と K の関係を分散関係と呼ぶ。格子振動の場合には、$\omega^2 = C \sin^2 \frac{1}{2}Ka$

であるから、$\frac{2}{a}\sin^{-1}C^{-1}\omega = K$ なので、位相速度は $\omega/K = \omega/\{\frac{2}{a}\sin^{-1}C^{-1}\omega\}$ となり、ω(周波数) の関数になる (当然 ω を消して K の関数の形にも書け、その場合には、「波長の関数」になる)。これは、「振動数の違う波は進む早さが違う」ことを意味する。

この K と ω の関係が分散関係と呼ばれるのは、この関係により、ω が異なる波は早さが異なり、進行していくに連れて分散していく様に見えるからである (このことは、次で群速度を考える時にもっと重要になる)。

波として光を考えると、光は真空中では $\omega \propto K$ なので、周波数や波長が異なっても同じ早さで進むが、真空以外の媒質中では $\omega \propto K$ ではなくなり、波長によって進む早さが異なる。この結果、光の屈折率は波長によって異なることになり、プリズムに入射した光は、波長によって進行方向が変わり、虹を作る。すなわち、白色光が「分散」して七色にわかれる。歴史的にはこれが、 K と ω の関係を「分散」と呼ぶ理由である。

逆に、真空中の光のように、波長が変わっても位相速度が変わらない場合 ($\omega \propto K$ となる場合)、分散が無い、あるいは、無分散である、という。

2　群速度

波に関するもう一つの速度、「群速度」とは何が進む早さのことであろう。教科書を開けば、「群速度は波束の進む早さ」だと記されている。従って、群速度を理解するには、まず「波束」とは何かを知っておく必要がある。

2.1　波束 (パケット)

量子力学では「電子は粒子の性質と波の性質持っている」と習う。キッテルの教科書でも「格子振動は波であると同時に、フォノンという粒子だともみなせる」という話しが出てくる。しかし、シュレーディンガーの波動方程式を解いて出てくるのは、sin, cos しかない。電子が波だというのはこれで納得するとしても、粒子としての電子はどこにいったのか。

この問に対する答が波束である。波束とは、単なる sin, cos を組み合わせて、空間的に局在する粒子の状態を表現したものである。では、具体的に波束とはどんなものであろう。

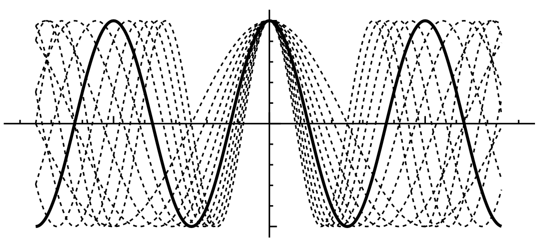

図 3: $\cos(Kx - \omega t)$, $(t = 0)$ で K が少しずつ異なる波。太い線で示したのが $K = K_0$ の波、それ以外は、$K = (1 \pm 0.1)K_0, (1 \pm 0.2)K_0, ...$ の波。

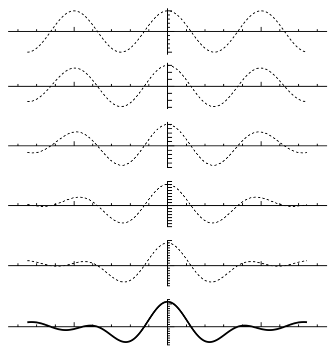

図 4: 波数の異なる波を重ね合わせて行く様子。一番上は $\cos K_0 x$ だけ。下に行くに従って、$\cos(1 \pm 0.1)K_0 x$, $\cos(1 \pm 0.2)K_0 x$, ... を足してある。下になると、$x = 0$ から離れた所の振幅が小さくなっていく。

図 3 に、$\cos(Kx - \omega t)$, $(t = 0)$ で、K が少しずつ異なる波を示した。図でもわかるように

$\cos(Kx)$ なので、$x=0$ ではどの波も山になるが、$x=0$ の点から離れると、それぞれの波の山谷はバラバラになっていく。この波を重ね合わせてったのが図4である。一番上は $\cos K_0x$ だけ、下に行くに従って、$\cos(1\pm0.1)K_0x$, $\cos(1\pm0.2)K_0x$, ... を足してある。図で明らかなように $x=0$ の近辺は全ての波が山になるので、重ね合わせても山のままで残るが、$x=0$ から離れた所では、色々な波の山谷が打ち消し合って振幅が小さくなっている。この様なものを波束と呼ぶ[1]。

波束に幅があるのは、有限の数の波しか加えていないせいである。幅を狭くしようと思えばより多くの波を足せばよい[2]。

2.2 波束の動く早さ (群速度)

では、波束はどんな早さで動くのであろうか。波束の運動する早さは、波束の中心あるいは、振幅が最大となる点の運動する早さ、と定義するのが自然であろう。この定義で、もし $\omega\propto K$ であれば (分散がなければ)、全ての波の山谷は同じ早さで動くので、波束は個々の波が動くのと同じ早さで動くことになる。すなわち、無分散であれば、群速度 = 位相速度 である。

では、分散がある時、波束が動く早さはどの様になるであろうか。図5は、図4の波束が時間とともにどの様に変化するかを追った図である。ここでは $K_0=\frac{1}{2}\frac{\pi}{a}$、$a=1$ とし、さらに $C/M=1$ として $\omega=2|\sin(\frac{1}{2}Ka)|$ という分散関係があるものとした。

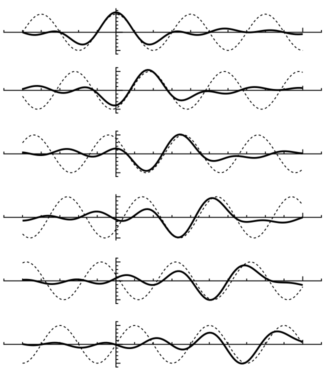

図 5: 図4の波束の形状が時間が経つにつれてどの様に変化していくかを追った図。

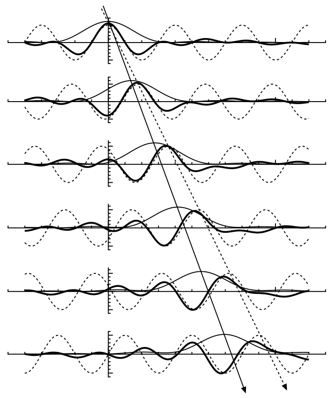

図 6: 波束の絶対値をとることで、波束の振幅が最大になる点が時間とともにどの様に動くかを見やすくした図。

図5を一見すると、時間が経つにつれて波束の形は変化していくものの、位相速度と群速度の差はあまり大きくないように見える。しかし実際には時間が経つに連れて、最初にあったピークの直後の谷が大きく成長しており、振幅のピーク位置は後ろにずれている。これを考慮すると、群速度は位相速度より遅くなっている。これをはっきりさせるために、sin 成分と cos 成分を両方計算し、二乗和をとることで、振幅のピーク位置がわかるようにしたのが、図6である。

位相速度は式で書けば $v_{\rm phase}=\omega/K$ と書けた。群速度を式で書くと $v_{\rm group}=\frac{\partial\omega}{\partial K}$ と書けることになっている。図6の例について具体的に計算してみると、

$$v_{\rm phase} = \frac{\omega}{K}$$

[1]今は、元になる $\cos Kx$ の振幅を全部一緒にしたが、本当は適当に係数を付けて、$\sum_{n=0\sim\infty}a_{\pm n}\cos K_{\pm n}x$ について $n\to\infty$ で $a_{\pm n}\to0$ となるようにしないと、変なことになる。たとえば、合計が δ 関数になる。また $K=K_0$ の周りの波だけでなく、広い波長範囲の波を全部たすことになる。

[2]これは、ちょうど不確定性の関係にある。すなわち、厳密に K を決める (確定した K しか許さない) と、波は一つの sin, cos の形になって場所がきまらない、一方、広い範囲の K を加算して良いなら (K が決まらなくてよければ)、場所はいくらでも正確に指定できる、という関係にある。

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2|\sin(\frac{1}{2}Ka)|}{K} \\
&= \frac{2|\sin(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2a}a)|}{\frac{\pi}{2a}} \\
&= \frac{4a}{\pi}|\sin(\frac{\pi}{4})| \\
&= 2\sqrt{2}\frac{1}{\pi} \\
&= 0.900
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{\text{phase}} &= \frac{\partial\omega}{\partial K} \\
&= a\cos(\frac{1}{2}Ka) \\
&= a\cos(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2a}a) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= 0.707
\end{aligned}
$$

となる。群速度は位相速度の80%ぐらいになるが、図6を見ると確かにそうなっていることがわかる[3]。

2.3 群速度で伝わるもの

位相速度で「実質」伝わるものはない、と強調したが、では群速度では何が伝わるのか。

波束を考えると、波束の中心にある原子だけが振動している。振動エネルギーを有している原子は波束の中にある原子だけである。そう考えると、波束はエネルギーが伝達する早さだというのがわかる。また、波束がという形で、モールス信号を送るように情報を伝えることができる。すなわち群速度は、情報が伝わる速度でもある[4]。

ふりかえって位相速度を考えると、位相速度は定常的に全空間に広がる sin、cos の山谷の動く速度である。もともと、全体が同じ強度で振動し続けているので、エネルギーが伝わることはない。また途切れること無く続く波は信号には使えないので、情報が伝わることもない。そういう意味で、位相速度は何も伝えない速度である。

脱線になるが、エネルギーの伝達速度・情報の伝達速度が群速度だということは、相対論の制約を受けるのは群速度だということになる。逆にいうと位相速度は相対論の制約を受けない。実際、位相速度が真空中の光速を越える例は多くある(導波管を伝わる電磁波、結晶中を伝わるX線、キッテルでも出てくるポーラロン)。基本的に部分的に共鳴した波では、位相速度が上がり、群速度が下がり、積が一定という関係が出てくる。ひまがあったら、この部分も書き直そう。

2.4 群速度の表式の導出

なかなかうまい説明がでてこないなあ。

[3] $\omega(K)$ の式は上に凸なので、群速度は常に位相速度より遅くなる。
[4] 情報とエネルギーは実は等価なので、両者の伝わる速度が同じなのはある意味当然。